ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES
OPTION MATHEMATIQUES (M')

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(Durée : 4 heures)

RAPPELS - NOTATIONS

. Une application $f : X_1 \longrightarrow X_2$ entre deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) est lipschitzienne s'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que pour tout $(x,y) \in X_1^2$

$$d_2(f(x),f(y)) \leqslant k\, d_1(x,y) \ ;$$

le plus petit réel k vérifiant cette propriété s'appelle le rapport de f et se note Lip (f) .

. Un homéomorphisme entre deux espaces métriques est une application continue, bijective et dont la réciproque est continue.

. On munira la droite réelle $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle et le plan $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x_1,x_2)\| = \max(|x_1|,|x_2|)$. On écrira $x = (x_1,x_2)$ les éléments de $\mathbb{R}^2$.

. On notera E l'espace vectoriel des applications continues et bornées de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

QUESTION PRELIMINAIRE : Pour tout $\psi_1 \in E$, on pose $\|\psi_1\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|\psi_1(x)\|$.
Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E et que cet ensemble est complet pour la distance associée à cette norme.

L'ensemble E^2 est l'espace vectoriel des applications continues bornées de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on notera $\psi = (\psi_1,\psi_2)$ les éléments de E^2 et on munira E^2 de la norme suivante :

$$\|(\psi_1,\psi_2)\| = \max(\|\psi_1\|,\|\psi_2\|) \ .$$

On se donne dans tout le problème un automorphisme linéaire

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) &\longrightarrow (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) \end{aligned}$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels tels que $0 < |\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$,

I) Nous fixons dans cette partie une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, lipschitzienne de rapport $k < \lambda_1$. Nous voulons montrer que $u + \varphi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1) On considère l'application :

$$\Phi : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow u^{-1}(y) - u^{-1}(\varphi(x))$$

a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique élément x de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Phi(x,y) = x$; on le note $\theta(y)$.

b) Montrer que pour tout $(y,y') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, on a :

$$\|\theta(y) - \theta(y')\| \leqslant \frac{1}{1 - k\lambda_1^{-1}} \|\Phi(\theta(y'),y) - \Phi(\theta(y'),y')\|$$

2) Montrer que $u + \varphi$ est homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

II) Nous notons D l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, bornées et lipschitziennes de rapport strictement inférieur à $k_o = \inf(\lambda_1, 1-\lambda_1, \lambda_2 - 1)$. L'ensemble D^2 est donc formé des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ bornées et lipschitziennes de rapport strictement inférieur à k_o.

Nous fixons dans cette partie deux applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que f−u et g-u appartiennent à D^2. Nous allons montrer qu'il existe un homéomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ tel que $f \circ h = h \circ g$.

1) Si $\psi \in E^2$, expliquer pourquoi l'application $U(\psi) = u \circ \psi \circ g^{-1}$ est bien définie et appartient à E^2 et montrer que l'application

$$U : \quad E^2 \longrightarrow E^2$$
$$\psi \longrightarrow U(\psi)$$

est linéaire, bijective, continue ainsi que son inverse.

2) Pour tout $\psi \in E^2$ on définit l'application

$$F(\psi) = f \circ (Id + \psi) \circ g^{-1} - Id \quad .$$

a)En étudiant $F(\psi) - U(\psi)$, montrer que $F(\psi) \in E^2$.

b) On note F l'application suivante :

$$\begin{aligned} F : \quad E^2 &\longrightarrow E^2 \\ \psi &\longrightarrow F(\psi) \end{aligned}$$

Montrer que F-U est lipschitzienne de rapport strictement inférieur à k_c

3) Pour tout $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in E^2$, on écrit $F(\psi) = (F_1(\psi), F_2(\psi))$ puis on définit $\hat{F}_2(\psi) = \psi_2 + \lambda_2^{-1}\, \psi_2 \circ g - \lambda_2^{-1}\, F_2(\psi) \circ g$.

Montrer que $\hat{F}_2(\psi) \in E$ et que l'application

$$\begin{aligned} \hat{F} : \quad E^2 &\longrightarrow E^2 \\ \psi &\longrightarrow \left(F_1(\psi), \hat{F}_2(\psi)\right) \end{aligned}$$

a les mêmes points fixes que F.

4)a) Montrer que les applications

$$\begin{aligned} F_1 : \quad E^2 &\longrightarrow E \\ \psi &\longrightarrow F_1(\psi) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \hat{F}_2 : \quad E^2 &\longrightarrow E \\ \psi &\longrightarrow \hat{F}_2(\psi) \end{aligned}$$

sont lipschitziennes de rapport strictement inférieur à 1.

b) Conclure.

5)a) Montrer qu'il existe des éléments ψ et $\tilde{\psi}$ de E^2, uniques, tels que :

$$\begin{aligned} f \circ (Id + \psi) &= (Id + \psi) \circ g \\ g \circ (Id + \tilde{\psi}) &= (Id + \tilde{\psi}) \circ f \quad . \end{aligned}$$

b) Montrer que $f \circ (Id + \psi) \circ (Id + \tilde{\psi}) = (Id + \psi) \circ (Id + \tilde{\psi}) \circ f$.

c) Montrer que $Id + \psi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et trouver son inverse.

III) On fixe dans cette partie une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f-u \in D$.

1) Montrer qu'il existe un homéomorphisme h tel que $f = h \circ u \circ h^{-1}$

2) Montrer que pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que

$$\|x\| \geqslant B \longrightarrow \|h(x)\| \geqslant A \quad .$$

3) Montrer que f a unique point fixe, noté x^* .

4) On note $(f^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite $\begin{cases} f^0 = Id \\ f^k = f \circ f^{k-1} \end{cases}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que $(f^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bien définie.

On définit alors $X_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f^n(x) = x^*\right\}$

et $X_- = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f^{-n}(x) = x^*\right\}$.

b) Montrer qu'il existe deux applications γ_- et γ_+ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, injectives et continues telles que

$$\begin{cases} \lim_{t \longrightarrow \pm\infty} \|\gamma_-(t)\| = \lim_{t \longrightarrow \pm\infty} \|\gamma_+(t)\| = +\infty \\ \gamma_-(\mathbb{R}) = X_- \quad , \quad \gamma_+(\mathbb{R}) = X_+ \quad . \end{cases}$$

c) Montrer que $X_- \cap X_+ = (x^*)$.

d) Montrer que si $x \notin X_+$ (resp. $x \notin X_-$), alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f^n(x)\| = +\infty \qquad \left(\text{resp.} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f^{-n}(x)\| = +\infty\right) .$$

IV) On rappelle que si $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire, alors $\|v\| = \sup_{\|x\| = 1} \|v(x)\|$.

1) Soit

$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \longrightarrow (ax_1 + bx_2,\ cx_1 + dx_2) .$$

Calculer $\|v\|$ en fonction de a, b, c et d .

2) Montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 est lipschitzienne de rapport k si et seulement si

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|Df(x)\| = k$$

où Df(x) est la différentielle de f en x .

3) Soit f telle que :

$$f(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1 + a \sin (x_1 + x_2)\ ,\ \lambda_2 x_2 + a \sin x_1) .$$

Pour quelles valeurs du réel a peut-on affirmer que f est un homéomorphisme ?

Pour quelles valeurs de a peut-on affirmer que f est conjugué à u ?

V) On se donne dans ce paragraphe un difféomorphisme de classe C^1 $f : E \longrightarrow E$ tel que $f(0) = 0$ et $Df(0) = u$.

1)a) Montrer que l'application

$$r : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ t \longrightarrow 1 & \text{si} \quad t \leqslant 1 \\ t \longrightarrow 0 & \text{si} \quad t \geqslant 2 \\ t \longrightarrow 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4 & \text{si } t \in]1,2[\end{cases}$$

est de classe C^1 .

b) Montrer que l'application

$$\tilde{r} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longrightarrow & r\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \end{cases}$$

est de classe C^1 et que la fonction $x \longrightarrow D\tilde{r}(x)$ est bornée.

2) Pour tout $\delta > 0$, on définit $f_\delta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par la formule

$$f_\delta(x) = \tilde{r}\left(\frac{x}{\delta}\right) f(x) + \left(1 - \tilde{r}\left(\frac{x}{\delta}\right)\right) u(x) \quad .$$

Montrer que si $\delta > 0$ est assez petit, alors $f_\delta - u \in D$.

3) En déduire qu'il existe deux voisinages V et W de (0,0) dans $\mathbb{R}^2$ et un homéomorphisme $h : V \longrightarrow W$ tel que pour tout $x \in V$ les conditions

$$f(x) \in V \qquad \text{et} \qquad u(h(x)) \in W$$

sont équivalentes et que l'on a $u(h(x)) = h(f(x))$.

4) Montrer qu'il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ et deux applications injectives et continues $\gamma_+ : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_- : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall \; x \in \gamma_+(I) \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} f^n(x) = (0,0) \; ,$$

$$\forall \; x \in \gamma_-(I) \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} f^{-n}(x) = (0,0)$$

et $\gamma_+(I) \cap \gamma_-(I) = \{(0,0)\}$.